21 Février 2025 *Benjamin Vincent*

Série 1

Exercice 1 : Calculs avec l'opérateur $\vec{\nabla}$

Soit $f(\vec{r},t)$ un champ scalaire et $\vec{u}(\vec{r},t)$ un champ vectoriel, dépéndant tous deux du temps t et de la position $\vec{r}$. Vérifier la validité des relations suivantes et indiquer si chacun des membres est un champs scalaire ou vectoriel.

(a) $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{u}) \stackrel{?}{=} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$

(b) $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})f \stackrel{?}{=} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})f$

(c) $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{u} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$

(d) $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \stackrel{?}{=} \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})$

Indication : Calculer ces expressions en coordonnées cartésiennes.

Exercice 2 : Gradient en coordonnées cartésiennes et sphériques

Dans le cours, nous avons défini $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ en coordonnées cartésiennes, mais ces opérateurs sont indépendants du système de coordonnées. On va illustrer ceci avec un exemple. On considère la fonction suivante :

$$f(\vec{r}) = \exp\left(-\frac{|\vec{r}|}{\lambda}\right)$$

(a) Calculer $\vec{\nabla} f$ en repérant $\vec{r}$ avec un système de coordonnées cartésiennes.

(b) Calculer $\vec{\nabla} f$ en repérant $\vec{r}$ avec un système coordonnées sphériques. Utiliser le formulaire.

Exercice 3 : Plus d'exemples en coordonnées sphériques

Pour un vecteur position $\vec{r}$, on définit la fonction suivante : $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$. En utilisant un système de coordonnées sphériques répondre aux questions suivantes :

(a) Calculer $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

(b) Que vaut $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$?

(c) Que vaut $\vec{\nabla} \times \vec{F}$? Pourriez-vous deviner le résultat ?

Indication : utiliser le formulaire du cours.

Exercice 4 : Calcul de flux

On considère un tuyau rectangulaire de section S et d'axe selon $\vec{e}_z$. Un liquide, de densité volumique ρ_0 constante, coule dans le tuyau à une vitesse fluide constante $\vec{u}_0 = u_0\vec{e}_z$.

(a) Quel est le flux de masse à travers la section du tuyau (on considère la section S perpendiculaire à l'axe $\vec{e}_z$) ?

(b) A présent, on considère une surface S', identique à S, mais qui n'est pas perpendiculaire à $\vec{e}_z$. Comment écrivez-vous le flux de masse à travers S' ? Ce flux est-il égal à celui calculé précédemment ?

Rappel : Le flux d'une quantité A à travers une surface S est définit comme la quantité de A qui traverse S par unité de temps.

Remarque : on ne veut pas utiliser la relation $\phi = \iint_{S'} d\phi = \iint_{S'} \rho\vec{u}_0 \cdot d\vec{S}'$ vue dans le cours. Le but de cet exercice est de la dériver.